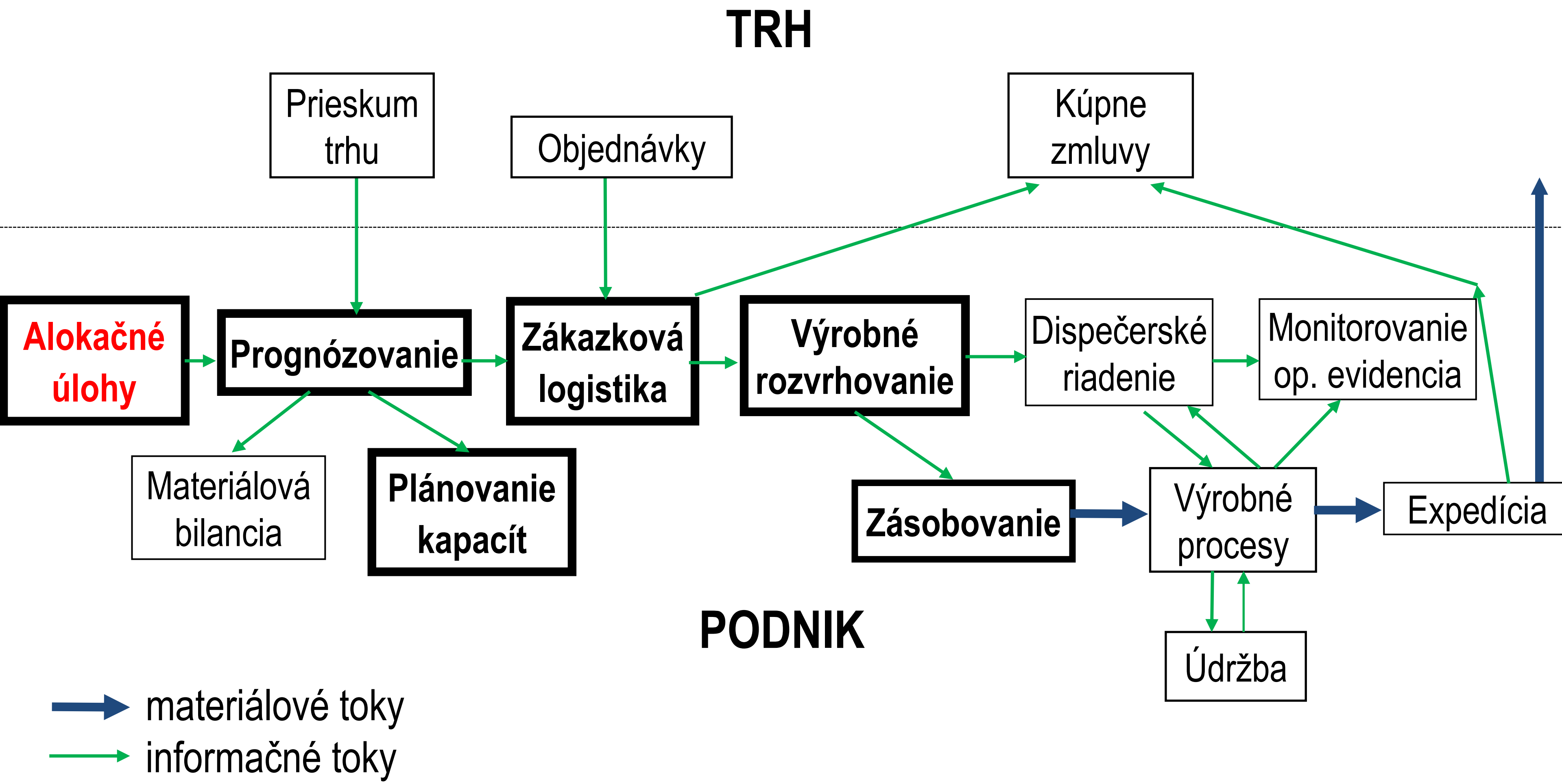
Štruktúra činností výrobnej logistiky



Alokačné úlohy

I. Alokácia (výrobných procesov) **do jedného miesta**:
   1. Ak nie sú k dispozícii presné údaje možno použiť Pomerovo-indexovú metódu
   2. Ak sú k dispozícii presné údaje ide o úlohu Optimálneho umiestnenia distribučného centra, pričom možno použiť rôzne typy vzdialenosti, napr.:
      a) Euklidovská vzdialenosť
      b) Kvadrát euklidovskej vzdialenosti
      c) Rektilineárna (Mannhatanská) vzdialenosť
      d) Minimalizácia vzdialenosti najvzdialenejšieho odberateľa

II. Alokácia (výrobných procesov) **do viacerých miest**
   1. Priradzovací problém (*n* objektov do *n* miest – základná verzia)
   2. Priradzovací problém (väzby len medzi novými a existujúcimi objektmi)
   3. Kvadratický priradzovací problém (väzby medzi novými objektmi navzájom)
   4. Zovšeobecnený distribučný problém (vyberáme podmnožinu *m* miest pre distribučné centrá a optimalizujeme dodávky *n* zákazníkom)

I. Alokácia do jedného miesta

1. Ak nie sú k dispozícii presné údaje

- **Predpoklady (popis úlohy)**:
  - ak sú známe lokality a treba vybrať najvhodnejšiu
  - ak je ťažké vyčísliť presné náklady
  - ak nie sú presne známi dodávatelia ani odberatelia
  - ak existuje veľa faktorov (kritérií), ktoré je ťažko ohodnotiť,
  - ale je možné vyjadriť závažnosť každého faktoru (kritéria) voči ostatným faktorom (kritériám)
  - a porovnať hodnoty faktorov (kritérií) pre jednotlivé lokality
- **Riešenie**: **pomerovo-indexová metóda**

(anglicky SAW *Simple Additive Weighting*),
na UHI preberané za účelom hodnotovej analýzy

Pomerovo-indexová metóda (1)

1. Pre vybrané lokality ($L = 1 \ldots n$) a daný výrobný proces najprv stanovíme rozhodujúce **faktory** F_i ($i = 1 .. m$), resp. **kritériá výberu**
2. Každému faktoru F_i prisúdime **váhu** w_i najlepšie tak, aby suma váh všetkých faktorov bola *1*, t.j. $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$
3. Pre hodnotenie jednotlivých faktorov F_i zvolíme **interval hodnôt** $< KD_i , KH_i >$ tj. definičný obor hodnôt HF_i a spôsob ohodnocovania tohto faktoru
   – KD_i je tzv. dolná hranica intervalu hodnôt HF_i
   – KH_i je tzv. horná hranica intervalu hodnôt HF_i

Pomerovo-indexová metóda (2)

4. Experti stanovia **hodnotenie** HF_i^L pre všetky lokality L a pre všetky a faktory F_i

   (t.j. pre všetky L = 1 .. n, i = 1 .. m)

5. Výsledné hodnotenie danej lokality L je dané **váženým súčtom**: $C^L = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot HF_i^L$

6. Ako najlepšia bude vybraná tá lokalita, pre ktorú je hodnota C^L **maximálna**, t.j.

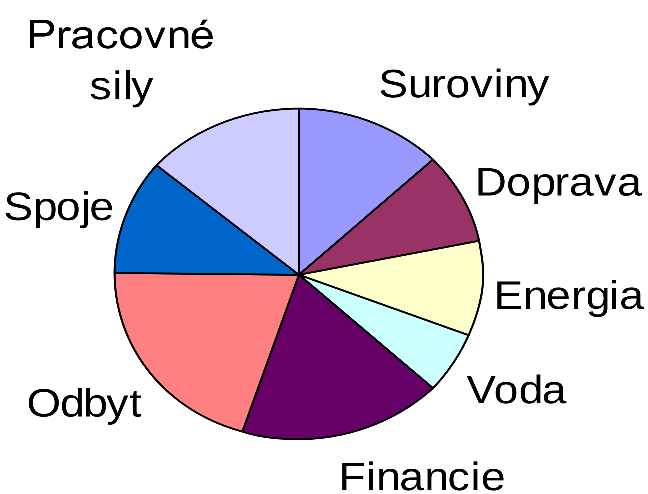
$$L \approx \max C^L$$

Príklad (1)

- Úlohou je vybrať najvhodnejšiu lokalitu pre umiestnenie výroby drevených hračiek z troch vytipovaných lokalít:
  - Spišská Nová Ves – SNV (Lokalita $L = 1$)
  - Rožňava – RV (Lokalita $L = 2$)
  - Svidník – SK (Lokalita $L = 3$)

Príklad (2)

1. Výber faktorov F_i *(i = 8)*
2. Priradenie váh w_i jednotlivým faktorom
3. $KD_i = 0$, $KH_i = 10$ pre všetky faktory F_i (i = 1 až 8)



Faktor F_i	Váha w_i
Suroviny (F_1)	0,13
Doprava (F_2)	0,09
Energia (F_3)	0,09
Voda (F_4)	0,06
Financie (F_5)	0,18
Odbyt (F_6)	0,20
Spoje (F_7)	0,11
Pracovné sily (F_8)	0,14

$$\sum_{i=1}^{8} w_i = 1$$

Príklad (3)

4. Expertmi stanovené hodnoty HF_i^L pre všetky L (1 až 3)

Faktor F_i	HF_i^1	HF_i^2	HF_i^3
Suroviny (F_1)	8	6	7
Doprava (F_2)	8	4	6
Energia (F_3)	4	4	2
Voda (F_4)	8	5	9
Financie (F_5)	7	2	6
Odbyt (F_6)	5	2	4
Spoje (F_7)	7	7	3
Pracovné sily (F_8)	5	5	5

Príklad (4)

5. Výpočet hodnôt ($w_i \,.\, HF_i^L$) pre všetky faktory F_i a všetky lokality L

Faktor F_i	$W_i \,.\, HF_i^1$	$W_i \,.\, HF_i^2$	$W_i \,.\, HF_i^3$
Suroviny (F_1)	1,04	0,78	0,91
Doprava (F_2)	0,72	0,36	0,54
Energia (F_3)	0,36	0,36	0,18
Voda (F_4)	0,48	0,3	0,54
Financie (F_5)	1,26	0,36	1,08
Odbyt (F_6)	1	0,4	0,8
Spoje (F_7)	0,77	0,77	0,33
Pracovné sily (F_8)	0,7	0,7	0,7
C^L=	**6,33**	**4,03**	**5,08**

6. Porovnanie súhrnných hodnotení C^L: $C^1 = \max(C^L)$ =>

najvhodnejšia lokalita je L = 1, t.j. Spišská Nová Ves

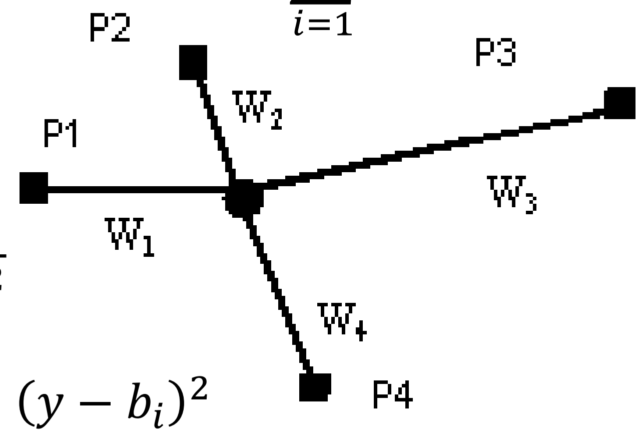
2. Sú k dispozícii presné údaje => Optimálne umiestnenie (jedného) distribučného centra

- **Predpoklady (popis úlohy)**:
  - V rovine existuje n objektov (odberateľov) (P_1 .. P_n) so súradnicami (a_1, b_1), … (a_n, b_n).
  - Treba nájsť súradnice pre umiestnenie nového objektu (distribučného centra) $\bar{x} = (x, y)$ tak, aby celkové náklady na realizáciu väzieb medzi existujúcimi objektmi a novým objektom $\bar{x}$ boli minimálne.
  - Intenzitu väzby medzi objektmi P_i a novým objektom (distribučným centrom) vyjadrujú koeficienty w_i ($i = 1..n$).
- **Riešenie**: závisí od spôsobu merania vzdialenosti
  - Používajú sa 4 rôzne typy vzdialeností

Matematický model
(4 rôzne varianty úlohy)

- **Matematický model je vyjadrený kriteriálnou funkciou, ktorej základ je stále rovnaký:**

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot d(\overline{x}, P_i)$$



- Pričom **sa mení spôsob výpočtu vzdialenosti** $d(\overline{x}, P_i)$

a) **Euklidovská**: $d(\overline{x}, P_i) = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$

b) **Kvadrát euklidovskej**: $d(\overline{x}, P_i) = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2$

c) **Rektilineárna (Manhattanská)**: $d(\overline{x}, P_i) = |x - a_i| + |y - b_i|$

d) **Minimálna (euklidovská) vzdialenosť najvzdialenejšieho objektu**: $f(\overline{x}) = \max_{i=1..n} \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$

Pre každý typ vzdialenosti je iný postup výpočtu optimálneho umiestnenia nového objektu (distribučného centra).

1. Euklidovská vzdialenosť (1)

- **Model**: minimalizovať $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}$
- **Riešenie**: **numerický iteračný postup** (hyperbolická aproximácia)
- Hľadáme extrém funkcie dvoch premenných (súradnica x a súradnica y pre umiestnenie distribučného centra),
- preto derivujeme funkciu nákladov parciálne

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}$$

- a jednotlivé parciálne derivácie položíme rovné nule,

t.j. pre súradnicu x: $\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{2w_i(x-a_i)}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} \overset{!}{=} 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i a_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}}$$

1. Euklidovská vzdialenosť (2)

Po úprave: $$x \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i \cdot a_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}}$$

a zavedení substitúcie: $$g_i(x,y) = \frac{w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + \xi}}$$

dostávame: $$x \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot g_i(x,y) \Rightarrow x = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot g_i(x,y)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x,y)}$$

čo iteratívne znamená:

$$x^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot g_i\left(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} g_i\left(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)}$$

počiatočná hodnota (ťažisko):

$$x^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

1. Euklidovská vzdialenosť (3)

- Dostávame iteratívne vzorce pre výpočet súradníc optimálneho umiestnenia distribučného centra $x^{(k)}$ a $y^{(k)}$.

1. **Na začiatku stanovíme hodnoty pre ťažisko** ($x^{(0)}$ a $y^{(0)}$)
2. **Postupne v každej ďalšej iterácii** (k) **počítame** $x^{(k)}$ a $y^{(k)}$ a následne $f(x^{(k)}, y^{(k)})$, pričom sa aktuálne riešenie ($x^{(k)}, y^{(k)}$) stále priblíži k optimu, t.j. klesne $f(x^{(k)}, y^{(k)})$.
3. **Po dosiahnutí požadovanej presnosti** (napríklad ak sa hodnota kriteriálnej funkcie na druhom ráde za desatinnou čiarkou už nemení) **výpočet ukončíme** a aktuálne hodnoty $x^{(k)}$ a $y^{(k)}$ určujú odporúčané umiestnenie distribučného centra.

1. Euklidovská vzdialenosť (4)

- Analogicky pre súradnicu y derivujeme funkciu nákladov parciálne podľa y, t.j.

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

- a položíme rovnú nule, t.j.

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial y} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{2 \cdot w_i \cdot (y - b_i)}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y \cdot w_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i \cdot b_i}{\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}}$$

1. Euklidovská vzdialenosť (5)

- Po úprave a zavedení substitúcie $g_i(x,y) = \dfrac{w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + \xi}}$

dostávame: $$y \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i \cdot b_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}}$$

$$y \sum_{i=1}^{n} g_i(x,y) = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot g_i(x,y) \Rightarrow y = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot g_i(x,y)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x,y)}$$

$$y^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot g_i\left(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} g_i\left(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)} \qquad y^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Príklad (1)

- Nájdite optimálne umiestnenie trafostanice pre 4 stanice s danými súradnicami: A[2,6], B[6,7], C[7,4], D[5,2], káblom s mernými ročnými nákladmi 3 PJ/km. Nová stanica bude napájaná káblom s ročnými nákladmi 5 PJ/km z existujúcej trafostanice E[1,1].

i	Miesto	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

i	Miesto	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

Príklad (2)

- Vyjdeme z počiatočných hodnôt súradníc $x^{(0)}$ a $y^{(0)}$ pre ťažisko a vypočítame zodpovedajúcu hodnotu kriteriálnej funkcie $f(x^{(0)}, y^{(0)})$.

$$x^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{5} w_i} \qquad x^{(0)} = \frac{2*3+6*3+7*3+5*3+1*5}{3+3+3+3+5} = \frac{65}{17} \doteq 3{,}82$$

$$y^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{5} b_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{5} w_i} \qquad y^{(0)} = \frac{6*3+7*3+4*3+2*3+5*1}{3+3+3+3+5} = \frac{62}{17} \doteq 3{,}65$$

$$f\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{5} w_i \sqrt{(x^{(0)} - a_i)^2 + (y^{(0)} - b_i)^2}$$

$$f\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = 3.\sqrt{(3{,}82-2)^2 + (3{,}65-6)^2} + \ldots + 5.\sqrt{(3{,}82-1)^2 + (3{,}65-1)^2} = 55{,}93$$

Príklad (3)

- Potom vypočítame substitučné koeficienty $g_i(x^{(0)}, y^{(0)})$ a dosadíme ich do iteračných vzorcov pre výpočet $x^{(1)}, y^{(1)}$
  $x^{(0)} = 3{,}82$; $y^{(0)} = 3.65$

$$g_i\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \frac{w_i}{\sqrt{(x^{(0)} - a_i)^2 + (y^{(0)} - b_i)^2 + \xi}}$$

$$g_1\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \frac{3}{\sqrt{(3{,}82-2)^2 + (3{,}65-6)^2 + 0{,}001}} \doteq 1{,}009$$

$$g_2\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \frac{3}{\sqrt{(3{,}82-6)^2 + (3{,}65-7)^2 + 0{,}001}} \doteq 0{,}751$$

$$g_3\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \frac{3}{\sqrt{(3{,}82-7)^2 + (3{,}65-4)^2 + 0{,}001}} \doteq 0{,}938$$

$$g_4\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \frac{3}{\sqrt{(3{,}82-5)^2 + (3{,}65-2)^2 + 0{,}001}} \doteq 1{,}479$$

$$g_5\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \frac{5}{\sqrt{(3{,}82-1)^2 + (3{,}65-1)^2 + 0{,}001}} \doteq 1{,}292$$

i	Miesto	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

Príklad (4)

- A dosadíme ich do iteračných vzorcov pre výpočet $x^{(1)}$, $y^{(1)}$

$$x^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot g_i\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)}{\sum_{i=1}^{5} g_i\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)} \qquad y^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{5} b_i \cdot g_i\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)}{\sum_{i=1}^{5} g_i\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)}$$

$$x^{(1)} = \frac{2\cdot 1{,}009 + 6\cdot 0{,}751 + 7\cdot 0{,}938 + 5\cdot 1{,}478 + 1\cdot 1{,}292}{1{,}009 + 0{,}759 + 0{,}938 + 1{,}478 + 1{,}292} = 3{,}98$$

$$y^{(1)} = \frac{6\cdot 1{,}009 + 7\cdot 0{,}751 + 4\cdot 0{,}938 + 2\cdot 1{,}479 + 1\cdot 1{,}292}{1{,}009 + 0{,}751 + 0{,}938 + 1{,}479 + 1{,}292} = 3{,}53$$

- Opäť vypočítame hodnotu kriteriálnej funkcie pre nové umiestnenie distribučného centra $f(x^{(1)}, y^{(1)})$

$$f\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) = 3.\sqrt{(3{,}98-2)^2 + (3{,}53-6)^2} + \ldots + 5.\sqrt{(3{,}98-1)^2 + (3{,}53-1)^2} = 55{,}77$$

Príklad (5)

- A celý postup iteratívne opakujeme až do chvíle, kým zmena hodnoty kriteriálnej funkcie v dvoch po sebe nasledujúcich iteráciách klesne pod jednu stotinu PJ.

(k)	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$f(x^{(k)}, y^{(k)})$
0	3,82	3,65	55,935
1	3,98	3,53	55,772
2	4,06	3,47	55,730
3	4,10	3,44	55,719
4	**4,12**	**3,42**	**55,716**

2. Kvadrát euklidovskej vzdialenosti

- **Model**: minimalizovať $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2)]$

- **Riešenie**: dá sa dokázať, že optimálne umiestnenie distribučného centra je **v ťažisku**, t.j. presne v tom bode, z ktorého vychádza iteratívny výpočet v prípade euklidovskej vzdialenosti, t.j.:

$$x^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad y^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

3. Rektilineárna vzdialenosť

- **Model**: minimalizovať $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (|x - a_i| + |y - b_i|)$

- **Riešenie**: v prípade rektilineárnej vzdialenosti sa používa na výpočet optimálneho umiestnenia distribučného centra tzv. **mediánové umiestenie**.
- Dá sa totiž dokázať, že optimálne hodnoty pre súradnicu x aj y totiž musia ležať v x-ovej, resp. y-ovej súradnici niektorého zo vstupných objektov (pre každú súradnicu to samozrejme môže byť iný objekt).
- Použijeme nasledovný postup:

3. Rektilineárna vzdialenosť – postup riešenia

1. V tomto prípade je potrebné najprv jednotlivé objekty usporiadať vzostupne podľa ich súradnice x a tiež podľa y

   $a_{(1)} \leq a_{(2)} \leq \cdots \leq a_{(n)}$ $\qquad$ $b_{(1)} \leq b_{(2)} \leq \cdots \leq b_{(n)}$

2. Potom vypočítať jednotlivé čiastkové súčty váh w_i prislúchajúcich týmto objektom: $s_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} w_i$
3. a polovicu celkového súčtu váh: $s_{(m)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$
4. Vypočítané čiastkové súčty váh w_i pre x-ovú a y-ovú súradnicu tvoria usporiadanú postupnosť, pričom optimálne umiestnenie distribučného centra pre danú súradnicu zodpovedá súradnici odberateľa *k*, pre ktorého platí: $s_{(k-1)} \leq s_m \leq s_{(k)}$

Príklad (1)

- Použijeme tie isté vstupné údaje ako v príklade pre prípad Euklidovskej vzdialenosti vyššie.
- **Pre *x*-ovú súradnicu**:

$a_5\ (1) \le a_1\ (2) \le a_4\ (5) \le a_2\ (6) \le a_3\ (7)$

$s_5 = \mathbf{5}$

$s_1 = 5 + 3 = \mathbf{8}$

$s_4 = 5 + 3 + 3 = \mathbf{11}$

$s_2 = 5 + 3 + 3 + 3 = \mathbf{14}$

$s_3 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 = \mathbf{17}$

i	Miesto	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

$s_m = 8{,}5 \Rightarrow (s_4)$, *čo zodpovedá x-ovej súradnici v poradí 4.zákazníka* $\Rightarrow \mathbf{x = a_4 = 5}$

Príklad (2)

- **Pre *y*-ovú súradnicu**:

  $b_5\ (1) \leq b_4\ (2) \leq b_3\ (4) \leq b_1\ (6) \leq b_2\ (7)$

  $s_5 = \mathbf{5}$

  $s_4 = 5 + 3 = \mathbf{8}$

  $s_3 = 5 + 3 + 3 = \mathbf{11}$

  $s_1 = 5 + 3 + 3 + 3 = \mathbf{14}$

  $s_2 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 = \mathbf{17}$

i	**Miesto**	a_i	b_i	w_i
1	A	2	6	3
2	B	6	7	3
3	C	7	4	3
4	D	5	2	3
5	E	1	1	5

  s_m = 8,5 => (s_3), *čo zodpovedá y-ovej súradnici v poradí 3.zákazníka* $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y = b_3 = 4}$

- Takže optimálne umiestnenie distribučného centra v prípade použitia rektilineárnej vzdialenosti by bolo ***(5, 4)***

4. Minimalizácia vzdialenosti najvzdialenejšieho bodu

- **Matematický model**: minimalizovať

$$f(\overline{x}) = \max_{i=1..n} \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

- To je ekvivalentné úlohe $\min\left\{z : \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} \leq z; i = 1,2, \dots, n\right\}$
- **Riešenie**: v prípade minimalizácie vzdialenosti najvzdialenejšieho objektu je optimálnym umiestnením distribučného centra **stred kružnice s minimálnym polomerom (z) opísanej tak, že v nej ležia všetci odberatelia**.

Alokácia do viacerých miest

1. Priraďovací problém (základná verzia)

- **Predpoklady (popis úlohy)**:
  1. Majme n-objektov, ktoré je potrebné umiestniť do n-miest s minimálnymi nákladmi.
  2. Poznáme náklady c_{ij} (i = 1 ... n, j = 1 ... n) pre umiestnenie i-teho objektu do j-teho miesta.
  - Potom je možné zostaviť jednoduchý bivalentný model (dvojhodnotové premenné)
- **Riešenie**: **celočíselné** (bivalentné) **programovanie**

1. Priraďovací problém (základná verzia)

1. **Premenné:** $x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1..n, \forall j = 1..n$
2. **Kriteriálna funkcia:** $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \overset{!}{=} MIN$
3. **Ohraničenia:**
   - Pre každý objekt *i* : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1..n$
   - Pre každé miesto *j* : $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1..n$

Príklad

Máme 3 objekty *A, B, C* a 3 miesta na ich umiestnenie *K, L, M*. Zadaná je matica nákladov $\bar{C}$ (c_{ij}, *i* =1..3, *j* =1..3)

Úlohou je nájsť priradenie objektov do miest s minimálnymi nákladmi.

$$\bar{C} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & L & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Premenné: $x_{AK}, x_{AL}, x_{AM}, x_{BL}, x_{BK}, x_{BM}, x_{CK}, x_{CL}, x_{CM} \in \{0,1\}$

Krit. f.: $2x_{AK} + 4x_{AL} + 3x_{AM} + 5x_{BK} + 3x_{BL} + 4x_{BM} + 3x_{CK} + 2x_{CL} + x_{CM} \rightarrow \mathrm{MIN}$

Ohraničenia:

$$x_{AK} + x_{AL} + x_{AM} = 1 \qquad x_{AK} + x_{BK} + x_{CK} = 1$$

$$x_{BK} + x_{BL} + x_{BM} = 1 \qquad x_{AL} + x_{BL} + x_{CL} = 1$$

$$x_{CK} + x_{CL} + x_{CM} = 1 \qquad x_{AM} + x_{BM} + x_{CM} = 1$$

2. Priraďovací problém (väzby len medzi existujúcimi a novými objektmi)

- **Predpoklady**:
  1. Máme *p* existujúcich objektov, *n* nových objektov a *n* miest a sú väzby medzi novými a existujúcimi objektmi zadané nasledovne.
  2. Je známa matica prepravných sadzieb $\overline{W} = \left[w_{ik}\right]_p^n$ ktorá vyjadruje intenzitu **väzby medzi novými** (*i*=1..*n*) **a existujúcimi objektmi** (*k*=1..*p*)
  3. a matica **vzdialeností** $\overline{D} = \left[d_{kj}\right]_n^p$ **medzi existujúcimi objektmi** (*k*=1..*p*) **a novými miestami** (*j*=1..*n*)
- Riešenie: **celočíselné programovanie**

2. Priraďovací problém (väzby len medzi starými a novými objektmi)

1. **Premenné:** $x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1..n, \forall j = 1..n$
2. **Kriteriálna funkcia:** $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \overset{!}{=} MIN$
3. **Ohraničenia:**

   Pre každý objekt i : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1..n$

   Pre každé miesto j : $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1..n$

- **Matica nákladov:** $\overline{C} = \overline{W} \cdot \overline{D} = [w_{ik}]_p^n \cdot [d_{kj}]_n^p = [c_{ij}]_n^n$

Príklad – zadanie

- V tabuľke dole sú uvedené:
  - denné počty prepravovaných paliet medzi existujúcimi strojmi P, O, R a novými strojmi A, B, C (horná časť tabuľky),
  - vzdialenosti v metroch medzi existujúcimi strojmi P, O, R a jednotlivými miestami pre nové stroje E, F, G, H (dolná časť tabuľky).
- Z priestorových dôvodov nemožno premiestniť stroj B do miesta H.
- Nájdite optimálne rozmiestnenie nových strojov A, B, C do miest E, F, G, H

	Existujuce stroje [ks]	P	O	R
Nove stroje [ks]	A	5	4	2
	B	0	4	3
	C	4	3	2
Mozne miesta [m]	E	1	3	4
	F	4	4	3
	G	5	3	5
	H	6	4	2

$$\bar{W} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ \rightarrow D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & O & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\bar{D} = \begin{array}{c} \\ P \\ O \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & F & G & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Príklad – riešenie

- **Matematický model:** $x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1..4, j = 1..4$
  - Kriteriálna funkcia: $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} \cdot x_{ij} \overset{!}{=} MIN$
  - Ohraničenia pre každý objekt: $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1..4$
  - Ohraničenia pre každé miesto: $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1..4$
- **Matica nákladov:**

$$\overline{C} = \overline{W} \cdot \overline{D} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & O & R \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} . \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} E & F & G & H \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ O \\ R \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} E & F & G & H \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 25 & 34 & 47 & 50 \\ 24 & 17 & 27 & 1000 \\ 21 & 28 & 39 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Kvadratický priraďovací problém

- **Predpoklady**:
  1. Majme *n* objektov, ktoré je potrebné umiestniť do *n* miest s minimálnymi nákladmi (neuvažujeme žiadne existujúce objekty).
  2. Medzi novými objektmi existujú vzájomné väzby. Je známa matica vzdialeností medzi miestami pre umiestnenie objektov $\overline{D} = \left[d_{ij}\right]_n^n$
  3. a matica prepravných sadzieb medzi objektami $\overline{W} = \left[w_{ij}\right]_n^n$
  4. w_{ij} je intenzita väzby medzi *i*-tym a *j*-tym novým objektom.
- **Riešenie**:
  - **Metóda CRAFT** je heuristická a nezaručí nájdenie najlepšieho riešenia
  - **Metóda vetvenia a medzí** zaručuje nájdenie optimálneho riešenia, ale v nepolynomiálnom čase v závislosti od veľkosti vstupu *n*.

3. Kvadratický priraďovací problém

- Každé prípustné riešenie možno vyjadriť ako permutáciu: $\overline{P} = \left(p(1), p(2), \ldots, p(n)\right)$
- kde $p(i) = k$ znamená, že i-ty objekt bude umiestnený do miesta k
- Náklady pre akúkoľvek permutáciu sú:

$$f\left(\overline{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot d_{p(i)p(j)}$$

- kde $d_{p(i)p(j)}$ je vzdialenosť medzi miestami $p(i)$ a $p(j)$

Metóda *CRAFT*

1. Z východiskovej (náhodnej) permutácie $\bar{P}$ sa vytvorí:
   $\binom{n}{2}$ nových permutácií výmenami všetkých dvojíc objektov vo východiskovej permutácii $\bar{P}$
2. Pre každdú permutáciu sa vypočíta hodnota kriteriálnej funkcie $f(\overline{P})$
3. Vyberie sa to najlepšie riešenie a stane sa východiskovou permutáciou pre nasledujúcu iteráciu algoritmu.
4. Celý postup sa opakuje dovtedy, kým sa zlepšuje kriteriálna funkcia z jednej iterácie na druhú.

Príklad (1)

Štyri nové stroje (1,2,3,4) môžu byť umiestené do miest A, B, C, D. Vzdialenosti medzi novými miestami sú uvedené v matici $\overline{D}$, denné počty prepravovaných paliet medzi dvojicami nových strojov sú v matici $\overline{W}$. Jednotkové prepravné náklady sú rovnaké.

$$\overline{W} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \overline{D} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Príklad (2)

- Vyjdeme z náhodného rozmiestnenia objektov reprezentovaného napr. permutáciou: $\bar{P} = (3,1,4,2)$
- Pre rozmiestnenie objektov zodpovedajúce uvedenej permutácii, t.j. (C, A, D, B) je hodnota kriteriálnej funkcie: $f(\overline{P}) = w_{12}d_{CA} + w_{13}d_{CD} + w_{14}d_{CB} + w_{23}d_{AD} + w_{24}d_{AB} + w_{34}d_{DB} =$
$$= 4.5 + 1.3 + 3.3 + 2.6 + 0.4 + 7.6 = 86$$
- Všetkými možnými výmenami dvojíc objektov vytvoríme nové (susedné permutácie) a pre každdú z nich vypočítame hodnotu kriteriálnej funkcie:

Stroj	Stroj	$f(\overline{p})$
1 2 3 4	1 2 3 4	
C A D B	A C D B	86
	D A C B	76
	$\boxed{\text{B A D C}}$	$\boxed{64}$
	C D A B	66
	C B D A	84
	C A B D	82

Príklad (3)

- Najlepšia hodnota kriteriálnej funkcie v 1. iterácii zodpovedá permutácii $\bar{P} = (2,1,4,3)$, t.j. (B, A, D, C) s hodnotou kriteriálnej funkcie 64.
  - Preto táto permutácia sa stane východiskovou pre nasledujúcu iteráciu:

Stroj	Stroj	$f(\overline{p})$
1 2 3 4	1 2 3 4	
B A D C	A B D C	70
	$\boxed{\text{D A B C}}$	$\boxed{68}$
	C A D B	86
	B D A C	84
	B C D A	78
	B A C D	68

- Najlepšia hodnota kriteriálnej funkcie je po druhej iterácii 68, čo nie je lepšie, ako hodnota predchádzajúcej permutácie, takže výpočet končí.
- Výpočet je možné opakovať podľa potreby niekoľkokrát pre ľubovoľné východzie permutácie.

4. Zovšeobecnený distribučný problém

- **Predpoklady**:
  1. Výrobca dodáva tovar n odberateľom a má k dispozícii konečný počet m miest pre postavenie distribučných centier.
  2. Pre každé miesto sú určené fixné náklady $\boldsymbol{f_i}$ spojené so zriadením distribučného centra.
  3. Okrem toho sú stanovené všetky prepravné náklady $\boldsymbol{c_{ij}}$ od i-teho distribučného centra k j-temu odberateľovi.
  4. Úlohou je vybrať miesta pre zriadenie distribučných centier tak, aby celkové náklady (fixné aj prepravné) boli minimálne.
- **Riešenie**:
  A. **Celočíselné programovanie**
  B. **Heuristika** (klasický – procedurálny programovací prístup)
  C. **Logické programovanie ohraničení** (deklaratívny programovací prístup)

A. Celočíselné programovanie (1)

1. **Premenné**: Potrebujeme jednu binárnu premennú pre každdú potenciálnu lokalitu y_i (i = 1, 2 ... m)
   - y_i = 1 ak dané miesto bude vybrané pre zriadenie distribučného centra, ináč y_i = 0

- Podobne potrebujeme binárnu premennú pre každé možné priradenie odberateľa (j = 1, 2, ..., n) potenciálnemu distribučnému centru (i = 1, 2, ..., m)
  - x_{ij} = 1 ak i-te distribučné centrum bude dodávať j-temu odberateľovi, ináč x_{ij} = 0

2. **Kriteriálna funkcia**: Celkové náklady (fixné plus prepravné) majú byť mininálne:

$$f\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

A. Celočíselné programovanie (2)

3. Ohraničenia:

- týkajúce sa priradenia každého odberateľa práve jednému distribučnému centru, t.j.

$$\forall j = 1..n: \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

- Ohraničenia ktoré zabezpečia, že ak niektoré miesto pre distribučné centrum nebude vybrané, potom mu nie je možné priradiť žiadneho odberateľa

$$\forall i = 1..m, \forall j = 1..n: \quad x_{ij} \le y_i$$

A. Celočíselné programovanie (3)

- **Výhody**:
  - Jednoduché a priamočiare riešenie
  - Deklaratívny prístup, stačí sformulovať celočíselný program
- **Nevýhody**:
  - Počet možností je $2^m . 2^{n.m} = 2^{m.(1+n)}$. Pre úlohu reálneho rozmeru (napr. m = 20, n = 80) nezvládnuteľný rozmer
- **Záver**:
  - Ak nie sú dané špeciálne ohraničenia a rozmer úlohy nie je veľký, potom tento prístup je rozhodne najlepší

B. Heuristika (procedurálne programovanie) (1)

- Pre každý možný výber distribučných centier
  - t.j. každú ich možnú podmnožinu, ktorých je spolu 2^m
- Priradenie odberateľov je triviálne – každého odberateľa priradíme najbližšiemu distribučnému centru.
  - Výpočet hodnoty nákladov pre takéto riešenie
- Výber riešenia s najnižšou hodnotou kriteriálnej funkcie (celkových nákladov)

B. Heuristika (procedurálne programovanie) (2)

- **Výhody**:
  - Výrazné zmenšenie priestoru prehľadávania, a teda omnoho rýchlejší výpočet
- **Nevýhody**:
  - Vývoj takéhoto programu (pre úlohu m = 20, n = 80) trval cca. 2 mesiace.
  - Pomerne malá zmena zadania, napr. **ak obmedzíme kapacity distribučných centier**, alebo ak pripustíme, že **odberateľ môže odoberať tovar z viacerých distribučných centier** znamená, že je nutné program úplne zmeniť.
- **Záver**:
  - Ak je rozmer úlohy veľký a zadanie úlohy sa určite neskôr už nebude meniť, potom je tento prístup vhodný

C. Logické programovanie ohraničení (deklaratívne programovanie)

- **Výhody**:
  - Naprogramovanie tej istej úlohy trvalo podstatne kratšie (cca. 2 týždne) a zdrojový kód je takisto rádovo kratší než v prípade procedurálneho programovania (alternatíva B).
  - Program je omnoho flexibilnejší, t.j. napr. zmena zadania si vyžiada jednoduchú zmenu programu.
- **Nevýhody**:
  - Pomalší výpočet ako v prípade alternatívy B.
- **Záver**:
  - Výborný prototypovací nástroj.

A. Príklad riešenia vo VisualXpress (1. verzia)

```
LET
d=3        !miesta pre distribučné centra
o=5        !odberatelia

TABLES
vzdialenosti(d,o)
fixne_naklady(d)
dodavky(o)

DATA
vzdialenosti(1,1) = 5,3,8,4,2
vzdialenosti(2,1) = 9,6,1,3,5
vzdialenosti(3,1) = 2,4,6,8,3

fixne_naklady(1) = 300, 200, 400
dodavky(1) = 50, 70, 30, 80, 60
```

A. Príklad riešenia vo VisualXpress (1. verzia)

VARIABLES

y(d) !zriadiť, alebo nezriadiť distribučné centrum

x(d,o) !bude dané DC dodávať danému odberateľovi (áno/nie)

CONSTRAINTS

odberatelia(j=1:o): SUM(i=1:d) x(i,j) = 1 !odberateľ odoberá len od 1 DC

dodavatelia(i=1:d, j=1:o): x(i,j) < y(i)

naklady: SUM(i=1:d) fixne_naklady(i)*y(i) + SUM(i=1:d, j=1:o) dodavky(j) * vzdialenosti(i,j) * x(i,j)$

BOUNDS

y(i=1:d) .BV.

x(i=1:d, j=1:o) .BV.

B. Príklad riešenia vo VisualXpress (2. verzia)

Pridajme ohraničenie na obmedzené kapacity distribučných centier:

```
LET
d=3   !miesta pre distribučné centra
o=5   !odberatelia

TABLES
vzdialenosti(d,o)
fixne_naklady(d)
dodavky(o)
kapacity(d)

DATA
vzdialenosti(1,1) = ...
fixne_naklady(1) = 300, 200, 400
dodavky(1) = 50, 70, 30, 80, 60
kapacity(1) = 150, 130, 170
```

B. Príklad riešenia vo VisualXpress (2. verzia)

```
VARIABLES
y(d)     !zriadiť, alebo nezriadiť distribučné centrum
x(d,o)   !bude dané DC dodávať danému odberateľovi (áno/nie)

CONSTRAINTS
odberatelia(j=1:o): SUM(i=1:d) x(i,j)=1
   !odberateľ odoberá len od jedného DC
dodavatelia(i=1:d, j=1:o): x(i,j) < y(i)
kapacita(i=1:d): SUM(j=1:o) x(i,j)* dodavky(j) <
   kapacity(i)
naklady: SUM(i=1:d) fixne_naklady(i)*y(i) +
   SUM(i=1:d, j=1:o) dodavky(j) * vzdialenosti(i,j) *
   x(i,j)$

BOUNDS
y(i=1:d) .BV.
x(i=1:d, j=1:o) .BV.
```

B. Príklad riešenia vo VisualXpress (3. verzia)

Okrem obmedzených kapacít distribučných centier uvažujme teraz **prípad že jeden odberateľ môže odoberať tovar od viacerých distribučných centier.**

```
LET
d=3      !miesta pre distribučné centra
o=5      !odberatelia

TABLES
vzdialenosti(d,o)
fixne_naklady(d)
kapacity(d)
dodavky(o)

DATA
vzdialenosti(1,1) = ...
fixne_naklady(1) = 300, 200, 400
kapacity(1) = 150, 130, 170
dodavky(1) = 50, 70, 30, 80, 60
```

B. Príklad riešenia vo VisualXpress (3. verzia)

```
VARIABLES
y(d)     !zriadiť, alebo nezriadiť distribučné centrum (binárne)
x(d,o)   !koľko bude dané DC dodávať danému odberateľovi (reálne čísla)

CONSTRAINTS
odberatelia(j=1:o): SUM(i=1:d) x(i,j) = dodavky(j)
kapacita(i=1:d): SUM(j=1:o) x(i,j) <
   kapacity(i)*y(i)
naklady: SUM(i=1:d) fixne_naklady(i) * y(i) +
   SUM(i=1:d, j=1:o) vzdialenosti(i,j) * x(i,j)$

BOUNDS
y(i=1:d) .BV.
```